ข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์ มัธยมศึกษาตอนปลายปี 2555

15 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน 10 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน 10 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน รวม 100 คะแนน

1. ถ้าจุดโฟกัสทั้งสองของวงรี $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{7}=1$ เป็นจุดเดียวกันกับจุดโฟกัสทั้งสองของไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{81}=\frac{1}{25}$ แล้ว a^2 มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 9 ข. 16 ค. $\frac{344}{25}$ ง. 1432

2. กำหนดให้ A และ B เป็นเหตุการณ์โดยที่ $P(A^c)=\frac{5}{6}$ และ $P(A^c\cap B^c)=\frac{1}{2}$ แล้ว $P(B-A)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\frac{1}{6}$ ข. $\frac{1}{4}$ ค. $\frac{1}{3}$ ง. $\frac{2}{5}$

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

3. ถ้า $a_1, a_2, a_3, \ldots$ เป็นลำดับเลขคณิตของจำนวนจริง โดยที่ $a_1 \neq 0$ และ $a_{32} = 4a_{20}$ แล้ว $a_{10} + a_{25} + 2a_{40}$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. a_{67} ข. a_{68} ค. a_{69} ง. a_{70}

4. กำหนดให้ $\vec{A} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ และ $\vec{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ โดยที่ $b \neq 0$ และ $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ถ้ามุมระหว่าง $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$ เท่ากับ $60°$ แล้ว a มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ข. $-\frac{1}{2}$ ค. $\frac{1}{2}$ ง. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

5. ถ้า $f(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $\sqrt{x^3+1+2x\sqrt{x}}$ แล้ว $f(1)-f(0)$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0 ข. 0.4 ค. 1.2 ง. 1.4

6. ถ้า a และ b เป็นคำตอบของสมการ $3^{2x+1}+2^{x+1}=6^x+2(3^{x+1})$ โดยที่ $a \neq b$ แล้ว $\left(\frac{3}{2}\right)^{ab}$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\frac{1}{6}$ ข. $\frac{1}{3}$ ค. $\frac{1}{2}$ ง. 2

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

7. ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด 2×2 ซึ่ง $A^2 = 2(A + I_2)$ โดยที่ I_2 แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 2×2 แล้ว $|\det(A - I_2)|$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\sqrt{2}$ ข. 2 ค. $\sqrt{3}$ ง. 3

8. กำหนดให้ $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$ และ $g(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) โดเมนของ f = โดเมนของ g

(2) $f = g$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อ (1) เป็นจริง และข้อ (2) เป็นจริง ข. ข้อ (1) เป็นจริง และข้อ (2) เป็นเท็จ

ค. ข้อ (1) เป็นเท็จ และข้อ (2) เป็นจริง ง. ข้อ (1) เป็นเท็จ และข้อ (2) เป็นเท็จ

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

9. เด็กนักเรียนมัธยมปลายห้องมีจำนวนทั้งสิ้น $a+b$ คน ประกอบด้วยเด็กนักเรียนชาย a คน และเด็กนักเรียนหญิง b คน ถ้าสุ่มเลือกนักเรียนมา 2 คน จากนักเรียนทั้ง $a+b$ คนเหล่านี้ ปรากฏว่า ความน่าจะเป็นที่เด็กนักเรียนที่เลือกมา 2 คนนี้เป็นเพศเดียวกันมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$ จงพิจารณาว่า a^2+b^2-2ab มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0 ข. $|a-b|$ ค. $\binom{a+b}{2}$ ง. $a+b$

10. ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่อยู่ในช่วง $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ และสอดคล้องกับสมการ $\arcsin(\cos x)+\arccos(\sin x)=1$ แล้ว x เป็นสมาชิกของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

ก. $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ ข. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$ ค. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$ ง. $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

11. กำหนดให้ p และ q เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $q \neq 0$ ซึ่งทำให้สมการ $z^2 + pz + q = 0$ มีคำตอบที่ต่างกัน เป็นจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ถ้า $|z_1| = 1 = |z_2|$ แล้ว ส่วนจริงของ $z_1\overline{z_2}$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\frac{p}{2p^2} - 1$ ข. $\frac{p^2}{2q^2} - 1$ ค. $\frac{p}{q^2} - 1$ ง. $\frac{p^2}{2q} - 1$

12. กำหนดให้ r และ s เป็นจำนวนตรรกยะบวกใดๆ และ x และ y เป็นจำนวนอตรรกยะบวกใดๆ

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) r^s เป็นจำนวนตรรยะบวก (2) r^x เป็นจำนวนอตรรกยะบวก

(3) y^s เป็นจำนวนอตรรกยะบวก (4) x^y เป็นจำนวนอตรรกยะบวก

จำนวนข้อความที่เป็นจริงจากข้อความทั้งสี่ข้อความข้างต้นตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0 ข. 1 ค. 2 ง. 3

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

13. สำหรับ X และ Y ที่เป็นเมทรกซ์ขนาด 3×3 ใดๆ นิยาม $[X, Y] = XY - YX$

ให้ A, B, C และ D เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×3 ใดๆ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $\det([A, B]) = -\det([B, A])$

(2) $[A + C, B + D] = [A, B] + [C, D]$

(3) $\big[A, [B, C]\big] + \big[B, [C, A]\big] = -[C, [A, B]]$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อ (1), (2) และ (3) เป็นจริง

ข. ข้อ (1) เป็นจริง และข้อ (2) และ (3) เป็นเท็จ

ค. ข้อ (1) และ (3) เป็นจริง และข้อ (2) เป็นเท็จ

ง. ข้อ (1), (2) และ (3) เป็นเท็จ

14. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันจากเซตของจำนวนจริงไปยังเซตของจำนวนจริง และให้ a เป็นจำนวนจริง จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ถ้า $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h} = 10$ แล้ว $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 5$

(2) ถ้า $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 5$ แล้ว $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h} = 10$

ก. ข้อ (1) เป็นจริง และข้อ (2) เป็นจริง

ข. ข้อ (1) เป็นจริง และข้อ (2) เป็นเท็จ

ค. ข้อ (1) เป็นเท็จ และข้อ (2) เป็นจริง

ง. ข้อ (1) เป็นเท็จ และข้อ (2) เป็นเท็จ

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

15. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ โดยที่ $\cos^2 A + \cos^2 B \geq \sin^2 C$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ABC ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม

ข. ABC ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ค. ABC ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน

ง. ABC ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

16. ให้ I แทนเซตของจำนวนเต็มทั้งหมด

ถ้า $f: I \to I$ โดยที่ $f\big(x + f(y)\big) = x + y - 4$ ทุกจำนวนเต็ม x และ y แล้ว $f(10)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

17. กำหนดให้ $A = \left\{x \in R \middle| \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\tan^2 x} - \frac{1}{\cot^2 x} - \frac{1}{\sec^2 x} - \frac{1}{\csc^2 x} = -3\right\}$ และ $B = \{x \in A | 0 < x < 2\pi\}$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดของเซต B มีค่าเท่ากับเท่าใด

18. นักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลายห้องหนึ่งมีจำนวนทั้งหมด 63 คน ประกอบไปด้วยนักเรียนชาย a คน และนักเรียนหญิง b คน ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ครั้งหนึ่งปรากฏว่า คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชายเท่ากับ a คะแนน คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนหญิงเท่ากับ b คะแนน ถ้าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนของทั้งห้องเท่ากับ 35 คะแนน แล้วค่า b ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับเท่าใด

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

19. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมในระนาบพิกัดฉาก XY โดยที่ ABC มีความยาวเส้นรอบรูปเท่ากับ 36 หน่วย ให้ L, M และ N เป็นจุดบนด้าน BC, AC และ AB ตามลำดับ โดยที่ด้าน BL ยาว 3 หน่วย ด้าน CM ยาว 4 หน่วย และด้าน AN ยาว 5 หน่วย ถ้า $\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$ แล้ว $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ มีค่าเท่าใด

20. ถ้า x, y และ z เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $(4^{2x} + 2)(4^{2y} + 4)(4^{2z} + 8) = 4^{x+y+z+3}$ แล้ว $4^{2x+3y+4z}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

21. ให้ P เป็นพาราโบลา $y = 4x^2$ และ F เป็นจุดโฟกัสของ P จงหาสมการทางเดินของจุดกึ่งกลางของคอร์ดของ P ซึ่งคอร์ดเหล่านี้ผ่านจุดโฟกัส F

22. ตารางขนาด 1×8 ตารางหน่วย แบ่งเป็นช่องขนาด 1×1 ตารางหน่วย จำนวน 8 ช่อง ระบายสีแต่ละช่องด้วยสีเพียงหนึ่งสี จากสีแดง เหลือง ดำ โดยที่จำนวนช่องที่มีสีแดงเป็นจำนวนคี่และตารางนี้ถูกระบายสีครบทุกสี จงหาจำนวนรูปแบบทั้งหมดที่เป็นไปได้จากการระบายสีตารางตามเงื่อนไขดังกล่าว

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

23. กำหนดให้ l เป็นเส้นตรงที่มีความชัน $\frac{7}{2}$ และเส้นตรง l ไม่ตัดกับพาราโบลา $y = x^2$ กำหนดให้ A และ B เป็นจุด 2 จุดบนเส้นตรง l โดยที่ส่วนของเส้นตรง AB ยาว 2555 หน่วย จงหาพิกัดของจุด C ที่อยู่บนพาราโบลา $y = x^2$ ซึ่งทำให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีพื้นที่น้อยที่สุด

24. กำหนดให้ $f: [-4, \infty) \to R$ โดยที่ $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{x^2+7x+14}$ จงหาเรนจ์ของฟังก์ชัน f

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

25. จงหาค่าของ $\left(\frac{1+\sin\left(\frac{\pi}{2555}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{2555}\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2555}\right)-i\cos\left(\frac{\pi}{2555}\right)}\right)^{2555}$ โดยที่ i เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $i^2=-1$

26. กำหนดให้ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นลำดับของจำนวนเต็มบวกเรียงติดกันที่มากกว่า 1 พจน์ (เช่น $78, 79, 80, 81, 82$) ถ้าผลรวมของพจน์ทุกพจน์ในลำดับเท่ากับ 2012 แล้วค่าของ a_1 เท่ากับเท่าใด

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

27. ให้ $A = \left\{a \in R \middle| \left|x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}\right| \leq \text{ทุกๆ } x \in [0,1]\right\}$ จงหาสมาชิกตัวเล็กสุด และสมาชิกตัวใหญ่สุดของ A

28. มีไม้ขีดไฟ 10 ก้านที่มีความยาว $1, 2, \ldots, 10$ หน่วย ตามลำดับ สุ่มหยิบไม้ขีดมา 3 ก้าน จงหาความน่าจะเป็นที่ไม้ขีดทั้งสามก้านสามารถประกอบเป็นด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านได้

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

29. ให้ S เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยกราฟ $y = x(1-x)$ กับแกน X จงหาค่า m ทั้งหมดที่ทำให้เส้นตรง $y = mx$ แบ่ง S เป็น 2 ส่วน โดยที่แต่ละส่วนมีพื้นที่เท่ากัน

30. กำหนดให้ A, B และ C เป็นสับเซตของ $\{1, 2, \dots, 12\}$ โดยที่ $A \cap B \cap C = \{1\}$, จำนวนสมาชิกของ A, B และ C มีค่าเท่ากัน และสอดคล้องสมบัติต่อไปนี้

(1) $\forall a \in A \; \exists b \in B, a|b$

(2) $\forall b \in B \; \exists c \in C, b|c^2$

(3) $\forall c \in C \; \exists a \in A, c^2|a^3$

ในบรรดาเซต A ทั้งหมดที่เป็นไปได้ A มีผลบวกของสมาชิกทั้งหมดมากที่สุดเท่ากับเท่าใด

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

31. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงซึ่งทำให้สมการ

$$a\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+b\sin x+c\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$$

มีคำตอบอย่างน้อยสองค่าในช่วง $(0,\pi)$ จงหาสามสิ่งอันดับ (a,b,c) ทั้งหมดที่เป็นไปได้เมื่อ a เป็นจำนวนเต็ม และ $1<b<5$

32. กำหนดให้ $A=\{(2x,2y)\in R^2\,|\,\log_x(\log_y x)>0\}$

และ $B=\{(x,y)\in R^2\,||x|+|y|<2555$ และ x และ y เป็นจำนวนเต็ม$\}$

จงหาจำนวนสมาชิกของ $A\cap B$

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

33. กำหนดให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ เป็นลำดับอนันต์ของจำนวนจริงในช่วง $[0, 3]$ ซึ่งสอดคล้องกับอสมการ

$$\frac{x_n}{\sqrt{x_{n+1}+3}} \geq \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ทุก } n = 1, 2, 3, \ldots$$

ค่าของ x_{2555} ทั้งหมดที่เป็นไปได้เท่ากับเท่าใด

34. สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ กำหนดให้ $[x]$ เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุดซึ่งมีค่าไม่เกิน x

จงหาว่า มีจำนวนเต็มบวก n ทั้งหมดกี่จำนวนซึ่งทำให้

$$\sum_{j=1}^{2555} [2^{-j} n] = n - 1$$

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

35. สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n กำหนดให้ a_n = จำนวนจริงที่มีค่ามากที่สุด ที่ทำให้เส้นตรง $y = a_n x$ ตัดกราฟ $y = \sin x$ ทั้งหมด $4n + 1$ จุด จงหาค่าของ $\lim_{n\to\infty} na_n$

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่