ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ ประจำปีการศึกษา 2562

เวลา 3 ชั่วโมง

ตอนที่ 1 อัตนัย 15 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน

1. จงหาผลลัพธ์ $\sqrt{a^2+b}$ เมื่อ $a = \overbrace{999\ldots9}^{\text{n ตัว}}$, $b = \overbrace{1999\ldots9}^{\text{n ตัว}}$ และ n เป็นจำนวนนับ

2. จำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 800 และหารด้วย $4,5$ และ 6 แล้วเหลือเศษ 3 มีกี่จำนวน

3. จงหาจำนวนนับ n ที่มากที่สุดที่ทำให้ $10 < \sqrt{n^2-23n+133} < 11$



ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

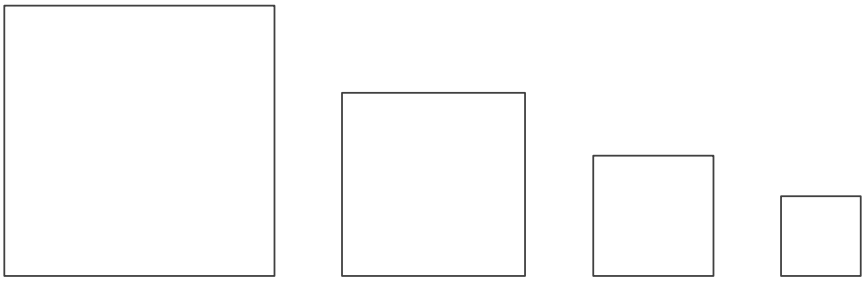
4. ห้องเรียนห้องหนึ่งมีนักเรียน 56 คน ซึ่งอัตราส่วนระหว่างจำนวนของนักเรียนหญิงต่อจำนวนของนักเรียนชาย เป็น $2:5$ แต่ฝ่ายวิชาการของโรงเรียนเห็นว่านักเรียนชายในห้องนี้มีจำนวนมากเกินไปจึงย้ายนักเรียนชายจำนวนหนึ่งไปอีกห้องหนึ่ง เพื่อให้อัตราส่วนใหม่ระหว่างจำนวนของนักเรียนหญิงต่อจำนวนของนักเรียนชายในห้องเรียนดังกล่าวเป็น $4:7$ จงหาจำนวนของนักเรียนชายที่ถูกย้ายไปอีกห้องหนึ่ง

5. กำหนดให้ A เป็นจำนวนนับสองหลัก ที่เลขโดดในหลักสิบมากกว่าเลขโดดในหลักหน่วย อยู่ 2 และ B เป็นจำนวนนับสองหลัก ที่เกิดจากการสลับเลขโดดที่เป็นหลักสิบและหลักหน่วยของ A ถ้า 4 เท่าของ A บวกด้วย $\frac{5}{7}$ เท่าของ B มีค่าเป็น 237 แล้ว $A-B$ มีค่าเป็นเท่าใด

6. จงหาคำตอบของอสมการ $\frac{x}{6}-\frac{1}{2}\leq\frac{3-4x}{6}<\frac{1}{3}-\frac{x}{4}$

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

7. พิจารณาแบบรูปต่อไปนี้



รูปที่ 1 รูปที่ 2 รูปที่ 3 รูปที่ 4

รูปทุกรูปในแบบรูปนี้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดย

รูปที่ 2 มีความยาวด้านเป็น $\frac{2}{3}$ เท่าของความยาวด้านของรูปที่ 1

รูปที่ 3 มีความยาวด้านเป็น $\frac{2}{3}$ เท่าของความยาวด้านของรูปที่ 2

รูปที่ 4 มีความยาวด้านเป็น $\frac{2}{3}$ เท่าของความยาวด้านของรูปที่ 3

และเป็นเช่นนี้เรื่อยไป

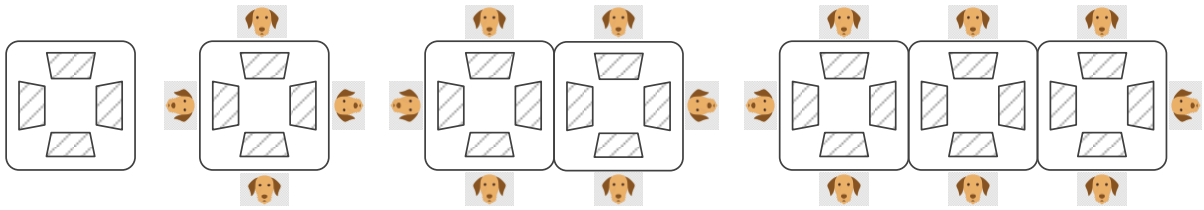
ถ้า n เป็นจำนวนนับที่ $n \geq 2$ และความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่ 1 เป็น 1 หน่วย แล้วรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่ n ในแบบรูปนี้ มีพื้นที่กี่ตารางหน่วย

8. ให้ C และ D เป็นจุดบน $\overline{AB}$ ซึ่ง $AC:CD:DB = 2:3:4$

ถ้าอัตราส่วนของผลรวมของพื้นที่รูปครึ่งวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางเป็น $\overline{AC}, \overline{CD}, \overline{DB}$ ต่อพื้นที่รูปครึ่งวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางเป็น $\overline{AB}$ เท่ากับ $x:y$ โดย ห.ร.ม.ของ x และ y เท่ากับ 1 แล้ว $x+y$ มีค่าเป็นเท่าใด

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

9. นายศักดิ์นำอาหารไปให้สุนัขที่สถานรับเลี้ยงสุนัขจรจัดบำเพ็ญ โดยเขาเตรียมถาดอาหารดังรูปที่ 1 ไว้



รูปที่ 1 รูปที่ 2 รูปที่ 3 รูปที่ 4

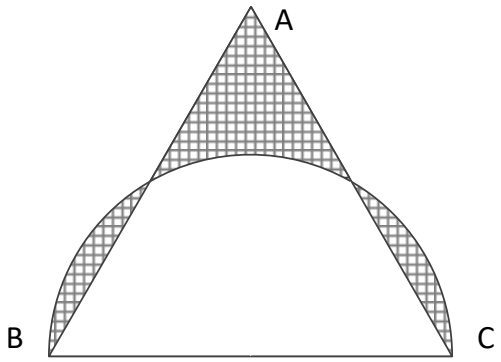
ถ้ามีสุนัขสี่ตัว เขาจะใช้ถาดหนึ่งถาด เพื่อให้อาหารสุนัขกินพร้อมกัน ดังรูปที่ 2

ถ้ามีสุนัขหกตัว เขาจะใช้ถาดสองถาดมาต่อกัน เพื่อให้อาหารสุนัขกินพร้อมกัน ดังรูปที่ 3

ถ้ามีสุนัขแปดตัว เขาจะใช้ถาดสามถาดมาต่อกัน เพื่อให้อาหารสุนัขกินพร้อมกัน ดังรูปที่ 4

ถ้านายศักดิ์มีถาดอาหารอยู่ n ถาด โดยที่ $n \geq 1$ แล้ว ด้วยวิธีการต่อถาดในลักษณะดังกล่าวนี้ นายศักดิ์จะสามารถให้อาหารสุนัขกินพร้อมกันได้กี่ตัว

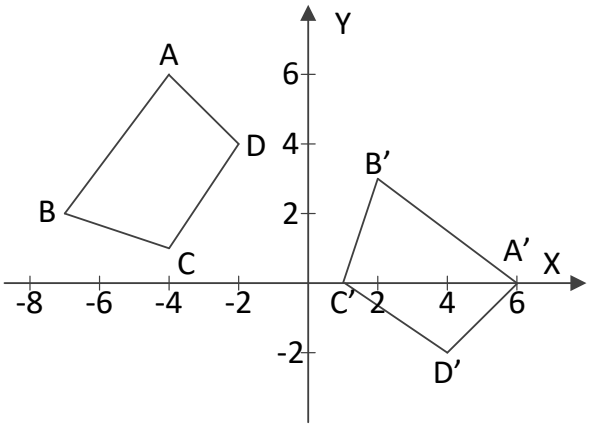
10. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ที่แต่ละด้านยาว 6 หน่วย สร้างครึ่งวงกลมซึ่งมีด้าน BC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง และครึ่งวงกลมนี้ตัดด้าน AB และ AC ดังรูป



จงหาพื้นที่ของส่วนที่แรเงา (ตอบในรูปจำนวนเท่าของ π)

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

11. ให้รูปสี่เหลี่ยม $A'B'C'D'$ เป็นภาพที่ได้จากการหมุนรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป



จงหาพิกัดของจุดหมุน และขนาดของมุมที่ใช้ในการหมุนในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

12. ให้ P เป็นจุดภายในของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $ABCD$ โดยที่ $PA:PB=1:3$ และ $A\hat{P}B=135°$

จงหา $PA:PB:PC$ (ตอบในรูปอัตราส่วนอย่างต่ำ และสามารถตอบในรูปกรณฑ์ได้)

13. ให้ a เป็นจำนวนจริง ถ้าข้อมูลเจ็ดค่าต่อไปนี้

$$a \quad a+1 \quad a+3 \quad a+5 \quad 2a \quad 2(a+1) \quad 2(a+2)$$

มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 5.5 แล้ว a มีค่าเป็นเท่าใด (ตอบในรูปทศนิยมสองตำแหน่ง)

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

14. นักเรียนจำนวน 10 คน สอบวิชาคณิตศาสตร์ได้คะแนนดังนี้

$$13 \quad 13 \quad 14 \quad 14 \quad 15 \quad 15 \quad 16 \quad 16 \quad 16 \quad 18$$

จงหาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 10 คนนี้ (ตอบในรูปกรณฑ์ได้)

15. ร้านสะดวกซื้อแห่งหนึ่ง สำรวจจำนวนลูกค้าที่มาซื้อของในร้าน จำนวน 400 คน ซึ่งแยกเป็น 5 ประเภทไม่ซ้ำกัน ได้ข้อมูลดังนี้

ประเภทลูกค้า	จำนวน(คน)
วัยเด็ก	36
วัยรุ่น	74
วัยทำงาน	130
วัยกลางคน	140
วัยชรา	20

ถ้าสุ่มลูกค้าหนึ่งคนจากลูกค้าจำนวน 400 คนนี้ แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกค้าวัยทำงานหรือวัยกลางคนมากกว่าความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกค้าวัยรุ่นหรือวัยชรา อยู่เท่าใด (ตอบในรูปทศนิยมสองตำแหน่ง)

ตอนที่ 2 อัตนัย 10 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน

16. ให้ a และ n เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $a = \sqrt[3]{3^9 + 3^{12} + 3^{15} + 3^n}$ จงหา $a - n$

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

17. กำหนดให้ $\circledast$ เป็นการดำเนินการระหว่างจำนวนจริงสองจำนวนที่มีสมบัติดังนี้

(1) $3 \circledast 3 = \frac{5}{3}$

(2) $(3x) \circledast y = \frac{1}{3} + (x \circledast y)$

(3) $y^2 \circledast x = x^2 \circledast y$

โดยที่ x และ y เป็นจำนวนจริงใดๆ จงหาผลลัพธ์ของ $3^6 \circledast 9$ ในรูปจำนวนจริงที่เป็นผลสำเร็จ

18. ให้ $p(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 12$

ถ้า $x - \sqrt{a}$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ $\sqrt{a} + 6$ แล้ว a มีค่าเป็นเท่าใด

19. ให้ y เป็นผลบวกของส่วนย่อยสามส่วน โดย ส่วนย่อยแรกแปรผันตรงกับ x ส่วนย่อยที่สองแปรผันตรงกับ x^2 และส่วนย่อยที่สามแปรผกผันกับ x^3 ถ้า $x = 1$ แล้ว $y = 1$ ถ้า $x = -1$ แล้ว $y = 9$ และ ถ้า $x = 2$ แล้ว $y = 0$ จงหาค่าของ y เมื่อ $x = -2$

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

20. เรือท่องเที่ยวชมวิวแม่น้ำเจ้าพระยาของบริษัทหนึ่ง เดินทางโดยใช้ความเร็วคงตัว a เมตรต่อนาที ถ้าน้ำนิ่งเรือลำนี้จะใช้เวลาเดินทางไปและกลับ ระหว่างจุด A และจุด B เป็น 1 ชั่วโมง แต่ในวันปีใหม่กระแสน้ำในแม่น้ำเจ้าพระยาไหลด้วยความเร็วคงตัว b เมตรต่อนาที เรือลำนี้จะใช้เวลาเดินทางไปและกลับ ระหว่างจุด A และจุด B มากขึ้น 30 นาที

จงหาอัตราส่วนระหว่างความเร็วของเรือต่อความเร็วของกระแสน้ำในวันปีใหม่ (ตอบในรูปอัตราส่วนอย่างต่ำ และสามารถตอบในรูปกรณฑ์ได้)

21. หลังคาทรงพีระมิดหลังหนึ่ง มีฐานเป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า วัดความยาวด้านของฐาน และความสูงตรงของพีระมิดจากแบบแปลนอาคารได้ 4 เซนติเมตร และ 2 เซนติเมตร ตามลำดับ

ถ้าแบบแปลนอาคารย่อส่วนในอัตราส่วน $1:100$ และช่างทาสีคิดค่าทาสีตารางเมตรละ 800 บาท แล้วค่าทาสีภายนอกหลังคาทั้งหลัง (ไม่รวมฐาน) คิดเป็นเงินกี่บาท

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

22. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ที่มีจุด D และ E อยู่บนด้าน BC (D อยู่ทางซ้ายของ E)

จากจุด D ลาก $\overline{DF}$ ขนานกับ $\overline{AE}$ ตัดด้าน AB ที่จุด F

ถ้า $BD:DC = 3:2$ และ $DE:EC = 3:4$ แล้ว อัตราส่วนของพื้นที่รูปสามเหลี่ยม BDF ต่อ พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABE ต่อ พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ACE เป็นเท่าใด (ตอบในรูปอัตราส่วนอย่างต่ำ)

23. ให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ที่มีด้าน AD ขนานกับด้าน BC และ $A\hat{B}C + B\hat{C}D = 90°$ ถ้าด้าน BC ยาว a เมตร และด้าน MN ยาว $\frac{a}{5}$ เมตร เมื่อ M และ N เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AD และด้าน BC ตามลำดับ แล้ว จงหาความยาวของด้าน AD โดยตอบในรูปของ a

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

24. ญาญ่าต้องการส่งบัตรอวยพรวันเกิดให้แฟนคลับจำนวนสี่คน คนละหนึ่งฉบับ โดยจ่าหน้าซองจดหมายถึงแฟนคลับแต่ละคนไว้คนละหนึ่งซอง ถ้าญาญ่าสุ่มหยิบบัตรอวยพรวันเกิดใส่ซอง ซองละหนึ่งฉบับ โดยไม่สนใจว่า “บัตรอวยพรวันเกิดฉบับใดใส่ซองใด” จงหาความน่าจะเป็นที่ญาญ่าจะหยิบบัตรอวยพรวันเกิดใส่ซองถึงแฟนคลับถูกต้องอย่างน้อยหนึ่งฉบับ (ตอบเป็นทศนิยมสามตำแหน่ง)

25. โรงงานผลิตเข็มเย็บผ้าแห่งหนึ่ง ต้องการผลิตเข็มที่มีความยาวตั้งแต่ 3.99 เซนติเมตร ถึง 4.24 เซนติเมตร หลังจากผลิตเข็มได้ 10,000 เล่ม จึงนำเข็มมาตรวจสอบ พบว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของความยาวเข็ม เท่ากับ 4.11 เซนติเมตร และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของความยาวเข็มเท่ากับ 0.04 เซนติเมตร ถ้าความยาวของเข็มที่ผลิตมีการแจกแจงปกติแล้ว จำนวนเข็มที่มีความยาวสั้นกว่าเข็มที่ต้องผลิตมีทั้งหมดกี่เล่ม

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

ตอนที่ 3 อัตนัย 10 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน

26. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนนับที่แตกต่างกันทั้งหมด ซึ่ง $a + c = 3b$ และ $a^2 + b^2 + c^2 = 230$ จงหาค่าของ $(a - b)^c$ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

27. ให้ x, y และ z เป็นจำนวนนับที่ทำให้ระบบสมการ $xy + yz = 506$ และ $xz + yz = 86$ เป็นจริง ถ้า M เป็นค่าสูงสุดของ $\frac{xy}{z}$ และ m เป็นค่าต่ำสุดของ $\frac{xy}{z}$ แล้ว $M + m$ มีค่าเป็นเท่าใด

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

28. ให้ m เป็นจำนวนเต็ม และ n เป็นจำนวนตรรกยะ ซึ่ง $2n$ เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้

$(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=m^2$ เป็นจริง

จงหาผลต่างที่มากที่สุดของผลบวก m และ n

29. จงหาจำนวนเต็ม k และรากทั้งสามของสมการ $a^3+3a^2-6a+k=0$ โดยที่ k อยู่ห่างจากศูนย์น้อยที่สุด และทำให้รากทั้งสามของสมการนี้เป็นจำนวนเต็ม

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

30. กรวยกลมตรงอันหนึ่งบรรจุของเหลว เมื่อนำฐานกลมของกรวยวางลงบนโต๊ะราบ จะเห็นระดับของของเหลวสูงเป็นครึ่งหนึ่งของความสูงกรวย ถ้าพลิกกรวยเอาด้านแหลมลงล่างให้ความสูงของกรวยตั้งฉากกับพื้นแล้ว ระดับของของเหลวในกรวยจะสูงเป็นร้อยละเท่าไรของความสูงของกรวย (ขอบกรวยไม่มีความหนาและตอบในรูปกรณฑ์ได้)

31. จงหาจำนวนของคู่อันดับ (m,n) ทั้งหมดที่ทำให้สมการ $(m+n)^2+5m+n=k^2$ เป็นจริง เมื่อ m และ n เป็นจำนวนนับที่มีค่าไม่เกิน 100 และ k เป็นจำนวนเต็ม

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

32. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวรอบรูปเท่ากับ 15 เซนติเมตร ลาก $\overline{AD}$ แบ่งครึ่งมุม $B\hat{A}C$ ตัดวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม ABC ที่จุด D

ให้ M และ N เป็นจุดบนด้าน AB และ AC ตามลำดับ ถ้า $M\hat{D}N = 60°$ แล้ว ความยาวรอบรูปของรูปสามเหลี่ยม AMN เป็นเท่าใด

33. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ซึ่งเส้นแบ่งครึ่งมุม $B\hat{A}C$ ตัด BC ที่จุด D

ถ้า $A\hat{B}C : B\hat{A}C = 3:1$ และ $AB + BD = AC$ แล้ว ขนาดของ $A\hat{B}C$ เป็นเท่าใด

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่

34. มีสลาก 7 ใบ เขียนหมายเลข 1 ถึง 7 ลงบนสลากใบละหนึ่งหมายเลข นำสลากทั้งหมดใส่ในกล่องทึบ สุ่มหยิบสลากสามใบขึ้นมาพร้อมกันจากกล่องทึบนี้ ความน่าจะเป็นที่ผลรวมของหมายเลขบนสลากเป็นจำนวนเฉพาะเป็นเท่าใด (ตอบในรูปเศษส่วนอย่างต่ำ)

35. ให้ m แทน จำนวนของจำนวนนับหกหลักทั้งหมดซึ่งผลคูณของเลขโดดทุกตัวในแต่ละจำนวนนับหกหลักนั้น เท่ากับ 49

และ n แทน จำนวนของจำนวนนับหกหลักทั้งหมดซึ่งผลคูณของเลขโดดทุกตัวในแต่ละจำนวนนับหกหลักนั้น เท่ากับ 15

จงหา $\frac{m}{n}$ (ตอบในรูปเศษส่วนอย่างต่ำ)

ห้ามคัดลอกและเผยแพร่